

Exercice 1

5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$.

1. On calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{quotient} \\ \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = -\infty \end{array} \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$$

Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

Par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + 1 \right) = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ la courbe \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x^4} = \boxed{\frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}}$$

3. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ on a $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln(x)$.

$$1 - 2 \ln(x) \geq 0 \iff -2 \ln(x) \geq -1 \iff \ln(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}} \quad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est croissante})$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-
Variations de f		$\frac{1+2e}{2e}$	1

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} + 1 \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{e^{2 \times \frac{1}{2}}} + 1 \\ &= \frac{1}{2e} + 1 \\ &= \frac{1+2e}{2e} \approx 1,184 \end{aligned}$$

4. a. Sur l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+2e}{2e} > 0$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

Sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$ la fonction f est continue et strictement décroissante avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Finalement l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

b. À la calculatrice, on trouve : *boxed* $0,65 < \alpha < 0,66$

c. D'après les questions précédentes et puisque la fonction f est croissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, la fonction f est strictement négative sur $]0; \alpha[$, s'annule en α et est strictement positive sur $]\alpha; +\infty[$.

5. a. Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore : $OM^2 = OH^2 + HM^2 = \boxed{x^2 + [\ln(x)]^2}$
- b. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + [\ln(x)]^2$. Elle est dérivable puisque somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) = \frac{2x^2 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2x^2 \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x} = 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 2x \times f(x)$$

Or, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $2x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

Donc, d'après la question 4.c., $h'(x)$ est négatif sur $]0; \alpha]$ et positif sur $[\alpha; +\infty[$. Donc h admet un minimum en $x = \alpha$.

La quantité OM^2 admet donc un minimum en α .

- c. Pour $x = \alpha$, on a $OM^2 = \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$.

α est la solution de l'équation $f(x) = 0$, donc $f(\alpha) = 0$.

Donc $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} + 1 = 0 \iff \ln(\alpha) = -\alpha^2 \implies (\ln(\alpha))^2 = \alpha^4$ Le minimum de OM^2 est donc $\alpha^2 + \alpha^4$.

Puisque la quantité OM^2 admet un minimum en α et que d est la valeur minimale de OM :

$$\boxed{d = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}}$$

